

$$na = (-a) + (-a) + \dots + (-a) = -a$$

$$0 \cdot a = 0$$

فيكون 0 هو العنصر المحايد في R .

R هي مجموعة

$$R' = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R \}$$

نعرّف R' على النحو التالي:

$$+ : (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$: R \times R' \rightarrow R'$$

نعرّف R' على النحو التالي:

$$x : (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

R' هي مجموعة R التي لها البنية الجبرية $(R', +, \cdot)$ ونعرّف R' على النحو التالي:

R' هي مجموعة

$M_n(R)$ هي مجموعة المصفوفات $n \times n$ على R ونعرّف R' على النحو التالي:

نعرّف R' على النحو التالي:

نعرّف R' على النحو التالي:

R' هي مجموعة R التي لها البنية الجبرية $(R', +, \cdot)$ ونعرّف R' على النحو التالي:

S هي مجموعة R التي لها البنية الجبرية $(S, +, \cdot)$ ونعرّف R' على النحو التالي:

$$R' = \{ f : S \rightarrow R \mid f \text{ هو دالة خطية} \}$$

نقول ان R القابلة لتجزئة S اذا تين

$$1) \quad f, g \in R^S \quad , \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad x \in S$$

$$2) \quad (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \quad ; \quad \forall a \in R$$

عندها نضع المجموعة R^S مودولا R

$(R^S, +)$ زمره ابلية بالجمع

وبنطبق الشروط الخمس (التي هي)

ناشئة من الخصائص التالية

اذا كان R حلقا، G مثالية في R (Ideal) اي

مثالية بترتيبها، اي يوجد $r \in R$ ان

اولا مادام G مثالية في R فكل $r \in R$ فبالتالي $rG \subseteq G$

$$R \times G \rightarrow G$$

$$(r, g) \mapsto rg \in G, \quad \forall r \in R$$

$$g \in G$$

ناشئة

ولهذا فاننا نأخذ G مودولا R بالترتيب R ونعبر عنه

بشكل G/R بالترتيب المودول.

بالمودول الجزئي

تعريف: اذا كان M مودولا R و N كونه كثر مثالية في M

$$0 \neq N \subseteq M$$

نقول أن لغة L هي $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ إذا وفقط إذا كانت L هي مجموعة
 كل $a^n b^n$ حيث $n \geq 0$ و a, b حرفين عشريين. M و N هي لغتان عشريتان.
 نرمز لـ $M \cap N$ بـ $M \cap N$.

نثبت بـ $M \cap N$ هي لغة عشريّة.
 نثبت أن $M \cap N$ لغة عشريّة إذا وفقط إذا توفرت الشرطتان:
 1) $\forall a, b \in N \Rightarrow a-b \in N$

2) $\forall r \in R, a \in N \Rightarrow r-a \in N$
 $a \in R, a \in N \Rightarrow (r-a) \in N$

البرهان

(1) الشرط الأول M و N هما لغتان عشريتان (لغة كلية الكمية)

$\forall a, b \in R, a \in N, b \in N \Rightarrow a-b \in N$ و $a \in R, a \in N \Rightarrow (r-a) \in N$
 والبرهان هو نفسه على أنهما لغتان عشريتان (لغة كلية الكمية) كما هو الحال مع M

بني مع التطبيق السابقين شرط واحد

$\forall a, b \in R, \forall a, b \in N$

$a \neq b \in N$ (1)

أي الشرطين (1) و (2) هما لغتان عشريتان

والبرهان هو نفسه على أنهما لغتان عشريتان (لغة كلية الكمية)
 والبرهان هو نفسه

ملاحظات إضافية:

(1) في أي مجموعة L على الشكل $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ هي لغة عشريّة (لغة كلية الكمية)
 (2) لغة L هي لغة عشريّة (لغة كلية الكمية) و L هي لغة عشريّة (لغة كلية الكمية)
 هو أي L هو مجموعة L هي لغة عشريّة (لغة كلية الكمية).

لأن L و N مجموعتان فرعيتان لـ M ، فإن $L \cup N$ هي مجموعة فرعية من M .
 جود ذلك لأن L و N مجموعتان فرعيتان لـ M .

$$\begin{aligned} L, N &\subseteq M \\ \Rightarrow L \cup N &\subseteq M \end{aligned}$$

البرهان

$$1) a, m \in L, a, m \in N \Rightarrow a, m \in L \cup N$$

أي أن $L \cup N \neq \emptyset$ غير خالية.

$$2) a, b \in L \cup N \Rightarrow a, b \in L \cup N$$

$$\begin{aligned} a, b \in L & \quad L \subseteq M \quad \Rightarrow \quad a, b \in L \\ a, b \in N & \quad N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad a, b \in N \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a, b \in L \cup N$$

$$3) \forall x \in L \cup N \Rightarrow x \in L, x \in N$$

$$\begin{aligned} \alpha x \in L & \quad L \subseteq M \\ \alpha x \in N & \quad N \subseteq M \end{aligned} \Rightarrow \alpha x \in L \cup N$$

من هنا الشرط يتبع المطلوب.

ملاحظة:

$$A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

$$A \cap X = X \cap A = A$$

مثال: - شجرة النشأ هي أشجار المولدات الزائفة.
 (أي شجرة الزائفة، المتشعبة في كل ما للمولدات).

أبداً ولا يوجد عنصر جزئي لـ \mathbb{Z} في \mathbb{Z} كما أننا تماماً متساويين
في التماثل

يسمى $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{Icm}(n, m)\mathbb{Z}$ بـ

$\text{Icm}(n, m)$: المصنف المشترك لـ n و m

نظر ذلك كدالة على ذاتها وبصورة أن الصورة الحقيقية هي
الزمن هي $n\mathbb{Z}$

$$n\mathbb{Z} = \{ \pm nt : t \in \mathbb{Z} \}$$

$$m\mathbb{Z} = \{ \pm mt : t \in \mathbb{Z} \}$$

$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = S\mathbb{Z}$$

$$S = \text{Icm}(n, m)$$

$$2\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}$$

الـ

(ن) علاقة الجبر

نقول $L, N \subseteq M$ إذا $R \subseteq M \times M$

عند الجبر

$$L + N = \{ x + n : x \in L, n \in N \}$$

$L + N$ و $N + L$ هما $L + N$ و $N + L$

في M و N و L

بـ

$$L + N \subseteq M$$

$L + N$ هو دالة M و N و L

وبعدى مجموع الدورلين الجزئيين
البرهان

$$1) \quad L + N \neq \emptyset$$

$$0_m \in L, 0_n \in N$$

$$0_m + 0_n = 0 \in L + N$$

$$\Rightarrow L + N \neq \emptyset$$

الخاصية 2) التي نريد إثباتها هي: $L + N$ مغلق تحت الجمع

$$2) \quad x, y \in L + N \Rightarrow x + y \in L + N$$

$$\Rightarrow a, a' \in L$$

$$b, b' \in N$$

$$x = a + b$$

$$y = a' + b'$$

$$\Rightarrow x + y = (a + b) + (a' + b')$$

$$= (a + a') + (b + b')$$

$$= a'' + b''$$

$$; a'' = a + a', b'' = b + b'$$

$$a, a' \in L \Rightarrow L \subset M$$

$$\Rightarrow a + a' \in L \Rightarrow a'' \in L$$

$$b, b' \in N \Rightarrow N \subset M$$

$$\Rightarrow b + b' \in N \Rightarrow b'' \in N$$

$$\Rightarrow x + y = a'' + b'' \in L + N$$

$$3) \forall r \in R, \forall x \in L + N \Rightarrow rx \in L + N$$

$$r \in R, a \in L, b \in N, x = a + b$$

$$r_x = r(a+b) = rax + rb$$

$$r \in R, a \in L, L \subset M$$

$$\Rightarrow ra \in L$$

$$r \in R, b \in N, N \subset M$$

$$\Rightarrow rb \in N$$

$$\Rightarrow ra + rb \in L + N$$

$$\Rightarrow r_x \in L + N$$

بملاحظة أنه إذا كان $L, N \subset M$ فإن $L + N \subset M$

$$L + N \subset M$$

نلاحظ أن $L \subset L + N$

$$\forall a \in L \Rightarrow a \in L + N$$

$$\Rightarrow L \subset L + N$$

$$N \subset L + N$$

بالمثل

فإذا كان L, N مجموعتين جزئيتين من M فإن $L + N$ هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في L و N .

نلاحظ أن

نلاحظ أن $L + N$ هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في L و N .
أي أن $L + N$ هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في L و N .



أولاً نلاحظ ما يلي: \vec{d} هو دالة متماثلة ذات

$$n^2 + m^2 = d^2 \quad ; \quad d = g \cdot d(m, n)$$

التاسع: المبرهن التالي: $d(m, n) = \gcd(m, n)$

نقارن دقيقتين:

(1) أثبت أن مجموعة المصفوفات الخطية هو الفضاء $M_n(\mathbb{R})$ تولدت
هو دالة جبراً بالثبات لكل مصفوفات مصفوفة عدد.

(2) أثبت أن المجموعة

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

تولد هو دالة جبراً في $M_2(\mathbb{R})$

(3) أثبت أن المجموعة $\{A, B\} \subset M_n(\mathbb{R})$ لا تولدت هو دالة

جبراً في \mathbb{R} ما لم يكن جبراً

جبراً في \mathbb{R}^+ أي في هو دالة جبراً

أثبت أن المصفوفة